TOPOLOGÍA EN $\mathbb{R}^n$

JORGE A. GUCCIONE AND JUAN J. GUCCIONE

Contents

1 Métricas y normas en $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1. Una *métrica en* $\mathbb{R}^n$ es una función $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, llamada *función distancia* o *métrica*, tal que

(1) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
(2) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in X$ (simetría),
(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x,y,z \in X$ (desigualdad triangular).

Proposition 1.2. *Para cada distancia d vale lo siguiente:*

(1) $d(x_1,x_r) \leq d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_{r-1},x_r)$ *para todo* $x_1,\dots,x_r \in \mathbb{R}^n$.
(2) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ *para todo* $x,y,z \in \mathbb{R}^n$.

Proof. El item (1) se sigue facilmente de la desigualdad triangular por inducción en r. Para probar el item (2), basta observar que por la misma desigualdad y la condición de simetría de la distancia, $d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$ y $d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x) = d(x,y)$. □

Definition 1.3. Una *norma* en $\mathbb{R}^n$ es una función $\|\ \|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

(1) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$.
(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposition 1.4. *Para cada norma $\|\ \|$ vale lo siguiente:*

(1) $\|x_1 + \cdots + x_r\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_r\|$ *para todo* $x_1,\dots,x_r \in \mathbb{R}^n$.
(2) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ *para todo* $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Proof. El item (1) se sigue de la desigualdad en el item (3) de la definición de norma, por inducción en r; mientras que el item (2), se sigue de que, por la misma desigualdad y el item (2) de la definición de norma, $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ e $\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\|$. □

Proposition 1.5. *Si $\| \ \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces la función $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $d(x,y) = \|x-y\|$, es una métrica que satisface:*

(1) *$d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (Invariancia por traslaciones)*
(2) *$d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| d(x,y)$ (Homogeneidad).*

Proof. En efecto,

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y,\\ d(x,y) &= \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x),\\ d(x,z) &= \|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z),\\ d(x+z,y+z) &= \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y) \end{aligned}$$

y, por último,

$$d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| = |\lambda| \|x-y\| = |\lambda| d(x,y),$$

como queremos. □

Exercise 1.6. Pruebe que si $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una distancia invariante por traslaciones y homogenea, entonces existe una única norma $\| \ \|$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $d(x,y) = \|x-y\|$, para todo $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Example 1.7. A continuación damos una breve lista de normas sobre $\mathbb{R}^n$.

(1) La función $\| \ \|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.
(2) La función $\| \ \|_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.
(3) La función $\| \ \|_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

Es claro que en estos ejemplos se satisfacen los dos primeros items de la definición de norma. En los dos primeros ejemplos el tercer item de la definición vale pues

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

y

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

A continuación probaremos esto mismo para el tercer ejemplo. Comenzaremos con la siguiente definición:

Definition 1.8. El *producto interno canónico* de $\mathbb{R}^n$ es la función $\langle \ , \ \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, donde x_i e y_i denotan a la i-ésima coordenada de x e y, respectivamente.

Proposition 1.9. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.
(2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.
(3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.
(4) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.
(5) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.
(6) $\langle x,x\rangle = \|x\|_2$.

Proof. Para cada $1 \leq i \leq n$ denotemos con x_i, y_i y z_i a la i-ésima coordenada de x, y y z, respectivamente. Los primeros tres items valen pues

$$\langle x+y,z\rangle = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i) z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle,$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda x_i, y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i, y_i = \lambda\langle x, y\rangle$$

y

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle y, x\rangle$$

Usando esto obtenemos ahora que

$$\langle x, \lambda y + z\rangle = \langle \lambda y + z, x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

lo que prueba que también valen los items (4) y (5). Finalmente $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2$, como queremos. □

Theorem 1.10 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *La desigualdad* $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2\|y\|_2$ *vale para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

Proof. Esto es evidente si $y = 0$. Supongamos que $y \ne 0$. Entonces cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|x\|_2^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|_2^2 = \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \ge 0.$$

Evaluando esta desigualdad en $\lambda := \langle x, y\rangle/\|y\|_2^2$ obtenemos que

$$\|x\|_2^2 - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|_2^2} \ge 0,$$

que claramente implica la desigualdad de Cauchy-Schwarz. □

Prueba del item 3 de la definicion de norma para $\|\ \|_2$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|_2^2 + 2\langle x, \rangle y + \|x\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|x\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

y, en consecuencia, $\|x + y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$, como queremos. □

Desde aquí y hasta el final de la sección fijamos una métrica d de $\mathbb{R}^n$. Las *bolas abiertas* y *cerradas* con *centro* en un punto z de $\mathbb{R}^n$ y *radio* $r > 0$, son los conjuntos

$$\mathrm{B}_r(z) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, z) < r\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{B}_r[z] := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, z) \le r\},$$

respectivamente. Por supuesto que estos conjuntos dependen de d.

Un *entorno* de un punto $x \in X$ es cualquier subconjunto V de $\mathbb{R}^n$ que incluye una bola abierta con centro en x.

El *diámetro* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es el número $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x, y)$. Por ejemplo $\operatorname{diam}(\mathrm{B}_r[x]) \le 2r$, pues si $y, y' \in \mathrm{B}_r[x]$, entonces $d(y, y') \le d(y, x) + d(x, y') \le 2r$. Un conjunto es *acotado* si tiene diámetro finito.

Proposition 1.11. *Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *A es acotado.*
(2) *Existe $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tal que $A \subseteq \mathrm{B}_r[x]$.*
(3) *Cualquiera sea $x' \in \mathbb{R}^n$ existe $r' > 0$ tal que $A \subseteq \mathrm{B}_{r'}[x']$.*

Proof. (1) ⇒ (2) Fijemos $x \in A$ arbitrariamente. Si $\operatorname{diam}(A) = r \in \mathbb{R}$, entonces $d(y, x) \le r$ para todo $y \in A$. Por lo tanto $A \subseteq \mathrm{B}_r[x]$.

(2) ⇒ (3) Tomemos x y r como en el item (2) y fijemos $x' \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente. Si $y \in \mathrm{B}_r[x]$, entonces $d(x', y) \le d(x', x) + d(x, y) \le d(x', x) + r$. Así, $y \in \mathrm{B}_{r'}[x']$, donde $r' := r + d(x', x)$.

(3) ⇒ (1) Porque de $A \subseteq \mathrm{B}_{r'}[x']$, se sigue que $\operatorname{diam}(A) \le \operatorname{diam}(\mathrm{B}_{r'}[x']) \le 2r'$. □

La *distancia* de un punto x de $\mathbb{R}^n$ a un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$.

El siguiente resultado es una generalización del item (2) de la Proposición 1.2.

Proposition 1.12. *$|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$, para todo $x,y\in \mathbb{R}^n$ y todo $A\subseteq \mathbb{R}^n$.*

Proof. Como $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ para todo $z\in A$,

$$d(x,A)\le d(x,y)+d(y,z) \qquad \text{para todo } z\in A.$$

Por lo tanto $d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$. Por simetría, $d(y,A)\le d(x,y)+d(x,A)$. □

2 Normas y métricas equivalentes

Dos normas $\|\ \|$ y $\|\ \|'$ de $\mathbb{R}^n$ son equivalente si existen $c,c'>0$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$\|x\|\le c'\|x\|' \quad \text{y} \quad \|x\|'\le c\|x\| \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}^n.$$

Notemos que si denotamos con d y d' a las distancias asociadas a estas normas, entonces

$$d(x,y)\le c'd(x,y) \quad \text{y} \quad d'(x,y)\le cd(x,y) \qquad \text{para todo } x,y\in\mathbb{R}^n.$$

En este caso, si denotamos con $\mathrm{B}_r(z)$ y $\mathrm{B}'_r(z)$ a las bolas abiertas de centro z y radio r con respecto a las metricas d y d' respectivamente, entonces

$$\mathrm{B}_{r/c}(z)=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,z)<r/c\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n : d'(x,z)<r\}=\mathrm{B}'_r(z) \tag{2.1}$$

y

$$\mathrm{B}'_{r/c'}(z)=\{x\in\mathbb{R}^n : d'(x,z)<r/c'\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,z)<r\}=\mathrm{B}_r(z), \tag{2.2}$$

de modo que

- un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es acotado con respecto a d si y sólo si lo es con respecto a d'.
- los entornos definidos por d y d' son los mismos.

Un cálculo sencillo muestra que

$$\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty.$$

Por lo tanto estas tres normas son equivalentes.

Una *sucesión de puntos de* $\mathbb{R}^n$ es una función $x\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$. Para cada $r\in\mathbb{N}$, *el r-ésimo término* de esta sucesión es $x_r := x(r)$. La sucesión $x\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}^r$ será denotada con $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ o más simplemente con (x_r). A veces aparecen naturalmente sucesiones $(x_r)_{r\in\mathbb{N}_0}$ que comienzan en cero. Esto no agrega nada pues el cambio de índice $y_r := x_{r-1}$ las convierte en sucesiones $(y_r)_{r\in\mathbb{N}}$ que comienzan en 1. También resulta cómodo considerar sucesiones $(x_r)_{r\ge r_0}$, que comienzan en un entero r_0. Cuando r_0 es un número natural podemos considerarlas como sucesiones $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ con el símple trámite de definir $x_1=\cdots=x_{r_0-1}=0\in\mathbb{R}^n$.

Recordemos que un subconjunto $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$ es infinito si y sólo si no es acotado y que, en este caso, existe una única función biyectiva y creciente $r\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$. Como venimos haciendolo denotaremos a esta función con $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Una subsucesión de una sucesión $x := (x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$, es la restricción de la función x a un subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$. Denotaremos con $(x_r)_{r\in\mathbb{N}'}$ a esta subsucesión y la identificaremos con la sucesión $(x_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$, obtenida componiendo x con la función $r\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$, mencionada en el párrafo anterior.

Proposition 2.1. *Con respecto a la métrica d_∞ (o a cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\|\ \|_\infty$), una sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$, está acotada si y sólo si, para cada $1\le i\le n$, la sucesión formada por las coordenadas i-ésimas de los x_r, lo está.*

Proof. Para cada $1 \le i \le n$ denotemos con x_{ri} a la i-ésima coordenada de x_r. Claramente,

$$x_r \in B_M[0] \text{ para todo } r \iff |x_{ri}| \le M \text{ para todo } 1 \le i \le n \text{ y todo } r.$$

Por lo tanto la sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ está acotada si y sólo si, para cada $1 \le i \le n$, la sucesión formada por las coordenadas i-ésimas de los x_r, lo está. □

3 Sucesiones Convergentes

Fijemos una métrica d en $\mathbb{R}^n$. Una sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la sucesión de números reales $(d(x_r, x))_{r\in\mathbb{N}}$ tiende a 0. En este caso decimos que x es el *límite* de $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ o que $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *tiende* a x, y escribimos

$$x = \lim_{r\to\infty} x_r.$$

Este límite es único. En efecto, como $d(x,y) \le d(x,x_r) + d(x_r,y)$ para todo r, si

$$\lim_{r\to\infty} x_r = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{r\to\infty} x_r = y,$$

entonces $d(x,y) = 0$ y, por lo tanto, $x = y$. Una sucesión de puntos de X es *divergente* si no es convergente.

Proposition 3.1. *Son equivalentes:*

(1) $\lim_{r\to\infty} x_r = x$.
(2) *Para toda bola abierta* $\mathrm{B}_\epsilon(x)$*, existe* $r_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_r \in \mathrm{B}_\epsilon(x)$ *si* $r \ge r_0$.
(3) *Para todo entorno* V *de* x*, existe* $r_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_r \in V$ *si* $r \ge r_0$.

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Por definición $\lim_{r\to\infty} x_r = x$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_r, x) < \epsilon$ para todo $r \ge r_0$, en otra palabras si y sólo si el item (2) vale.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dado un entorno V de x existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}_\epsilon(x) \subseteq V$. Por hipótesis existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_r \in \mathrm{B}_\epsilon(x)$ para todo $r \ge r_0$. Como $\mathrm{B}_\epsilon(x) \subseteq V$ se sigue de esto que $x_r \in V$ para todo $r \ge r_0$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Esto es trivial porque toda bola abierta con cento en x es un entorno de x. □

Remark 3.2. Notemos que si d y d' provienen de normas equivalentes, entonces determinan las mismas sucesiones convergentes. Además los límites de estas sucesiones convergentes, tampoco dependen de la métrica elejida. En efecto, esto se sigue inmediatamente de que los entornos determinados por d y d' son los mismos.

Remark 3.3. Por la nota previa, una sucesión de $\mathbb{R}^n$ converge con respecto a la métrica d_2 si y sólo si lo hace con respecta a la métrica d_1, y esto ocurre si y sólo si lo hace con respecta a la métrica d_∞.

Proposition 3.4. *Si d proviene de una norma $\|\ \|$, entonces las siguientes afirmaciones valen:*

(1) *Supongamos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones convergentes de puntos de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces* $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión convergente de puntos de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lim(x_n+y_n) = x+y$*, donde* $x := \lim x_n$ *e* $y := \lim y_n$.
(2) *Supongamos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión convergente de puntos de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la suceción* $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y* $\lim(\lambda x_n) = \lambda x$*, donde* $x := \lim x_n$.

Proof. (1) Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_n, x) < \epsilon/2$ para todo $n \ge n_1$ y $d(y_n, b) < \epsilon/2$ para todo $n \ge n_2$. Por lo tanto

$$d(x_n + y_n, x + y) = \|x_n - x + y_n - y\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| = d(x_n, x) + d(y_n, y) < \epsilon,$$

para todo $n \ge n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Por lo tanto $\lim(x_n + y_n) = x + y$, como afirmamos.

(2) Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$d(\lambda x_n, \lambda x) = \|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda|\|x_n - x\| = |\lambda| d(x_n, x) < |\lambda|\epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $\lim(\lambda x_n) = \lambda x$, como afirmamos. □

Proposition 3.5. *Con respecto a la métrica d_∞ (o a cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \|_\infty$), una sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$, converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$, si y sólo si, para cada $1 \leq i \leq n$, la sucesión de formada por las coordenadas i-ésimas de los x_r convergen a la i-ésima coordenada de x.*

Proof. Para cada $1 \leq i \leq n$ denotemos con x_i a la i-ésima coordenada de x y con x_{ri} a la i-ésima coordenada de x_r. Dado que $d_\infty(x, x_r) = \max_{1\leq i\leq n}(|x_{ri} - x_i|)$,

$$\lim_{r\to\infty} d_\infty(x, x_r) = 0 \iff \lim_{r\to\infty} |x_{ri} - x_i| = 0 \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Por lo tanto $\lim_{r\to\infty} x_r = x$ si y sólo si $\lim_{r\to\infty} x_{ri} = x_i$ para $1 \leq i \leq n$. □

Proposition 3.6. *Con respecto a la métrica d_∞ (o a cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \|_\infty$), toda sucesión acotada de puntos de $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.*

Proof. Procedemos por inducción en n. El caso en que $n = 1$ ya lo conocemos. Supongamos que $n > 1$, que, por hipótesis inductiva, el teorema vale en $\mathbb{R}^{n-1}$ y que $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de puntos de $\mathbb{R}^n$. Para cada $1 \leq i \leq n$ y cada $r \in \mathbb{N}$ denotemos con x_{ri} a la i-ésima coordenada de x_r. Por hipótesis inductiva existe $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ en $\mathbb{R}^{n-1}$ y una subsucesión $(x_{r_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{j\to\infty} x'_{r_j} = x'$, donde $x'_r := (x_{r1}, \dots, x_{r,n-1})$. A su vez, por el caso $n = 1$, existe $x_n \in \mathbb{R}$ y una subsucesión $(x_{r_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$, de $(x_{r_j})_{j\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x_{r_{j_k} n} = x_n$. Es evidente ahora que $\lim_{k\to\infty} x_{r_{j_k}} = x$, donde $x := (x_1, \dots, x_n)$. □

Proposition 3.7. *Todo subsucesión de una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$ que converge a un punto de $\mathbb{R}^n$, también converge a este puno.*

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ que converge a $x \in \mathbb{R}^n$ y consideremos una subsucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n'_0 \geq n_0$. Si $n' \in \mathbb{N}'$ es mayor o igual que n'_0, entonces $n' \geq n_0$ y, por lo tanto, $d(x_{n'}, x) < \epsilon$. Así $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ tiende a x. □

Una sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$, es de *Cauchy* si, para todo $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_r, x_s) < \epsilon$ siempre que $r, s \geq r_0$.

Proposition 3.8. *Toda sucesión convergente $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$, es de Cauchy.*

Proof. Denotemos con x al límite de $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ y tomemos $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_r) < \epsilon/2$ si $r \geq r_0$. Entonces $d(x_r, x_s) \leq d(x_r, x) + d(x, x_s) < \epsilon$ siempre que $r, s \geq r_0$. □

Lemma 3.9. *Toda sucesión de Cauchy de puntos de $\mathbb{R}^n$ es acotada.*

Proof. Supongamos que $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de $\mathbb{R}^n$. Por hipótesis existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_r, x_s) < \epsilon$ para todo $r, s \geq n_0$. En particular $x_r \in \mathrm{B}_1(x_{r_0})$ para todo $r \geq r_0$, por lo que $\{x_r : r \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{B}_M[x_{r_0}]$, donde $M := \max\{d(x_1, x_{r_0}), \dots, d(x_{r_0-1}, x_{r_0}), 1\}$. □

Theorem 3.10. *Si una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces es convergente.*

Proof. Supongamos que $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ es una tal sucesión y que $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, \ldots$ es una subsucesión convergente. Escribamos $x = \lim_{i\to\infty} x_{r_i}$. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_{r_i}, x) < \epsilon/2$ y $d(x_r, x_s) < \epsilon/2$ siempre que $r_i, r, s \geq r_0$. Elijamos $r_i \geq r_0$. Entonces,

$$d(x_r, x) \leq d(x_r, x_{r_i}) + d(x_{r_i}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

siempre que $r \geq r_0$. □

Proposition 3.11. *Si dos métricas d y d' provienen de normas equivalentes, entonces determinan las mismas sucesiones de Cauchy.*

Proof. Denotemos con $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ a las normas que definen d y d' respectivamente. Por hipótesis existen $c, c' > 0$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$\|x\| \leq c'\|x\|' \quad \text{y} \quad \|x\|' \leq c\|x\| \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Supongamos que $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es de cauchy para la norma $\| \ \|$ y tomemos $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe r_0 tal que $\|x_r - x_s\| < \epsilon/c$ para todo $r, s \geq r_0$. Así, $\|x_r - x_s\|' \leq c\|x_r - x_s\| < c(\epsilon/c) = \epsilon$ para todo $r, s \geq r_0$. Por lo tanto $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es de cauchy para la norma $\| \ \|'$. Por simetría toda sucesión de Cauchy para la norma $\| \ \|'$ es también de Cauchy para la norma $\| \ \|$. □

Remark 3.12. Con respecto a la métrica d_∞ (o a cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \ \|_\infty$), una sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y sólo si, para cada $1 \leq i \leq n$, la sucesión de las i-ésimas coordenadas de los x_r, es de Cauchy.

Theorem 3.13. *Con respecto a la métrica d_∞ (o a cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \ \|_\infty$), toda sucesión de Cauchy de puntos de $\mathbb{R}^n$ es convergente.*

Proof. Por el Lema 3.9 y la Proposición 3.6 toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente y, en consecuencia, debido al Teorema 3.10, ella misma lo es. □

4 Conjuntos abiertos e interior

Fijemos una métrica d en $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ es *abierto* si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_r(x) \subseteq U$. En otras palabras un conjunto es abierto si y sólo si es un entorno de cada uno de sus puntos. De esta definición se sigue inmediatamente que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. Pronto veremos que también vale la recíproca. De las inclusiones (2.1) y (2.2), si dos métricas provienen de normas equivalentes, entonces definen los mismos abiertos. En particular esto pasa para las métricas d_∞, d_1 y d_2. Salvo mención en contrario, cuando hablemos de $\mathbb{R}$, lo supondremios provisto de la m'etrica usual.

Example 4.1. Para cada par de números reales $a \leq b$, el intervalo abierto (a, b) es un abierto de $\mathbb{R}$. Más generalmente, para cada métrica d de $\mathbb{R}^n$ las bolas abiertas $\mathrm{B}_r(x)$ son abiertos. En efecto, dado $y \in \mathrm{B}_r(x)$, la bola $\mathrm{B}_{r-d(x,y)}(y)$ está incluída en $\mathrm{B}_r(x)$, porque

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) = r \qquad \text{para cada } z \in \mathrm{B}_{r-d(x,y)}(y).$$

Example 4.2. Para toda métrica de $\mathbb{R}^n$ el complemento de cada bola cerrada es abierto. En efecto, esto se sigue inmediatamente de la siguiente proposición.

Proposition 4.3. $\mathrm{B}_r[x] \cap \mathrm{B}_s(y) = \emptyset$ *siempre que* $r + s \leq d(x, y)$.

Proof. Si existiera $z \in \mathrm{B}_r[x] \cap \mathrm{B}_s(y)$, entonces sería

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + s \leq d(x, y),$$

absurdo. □

Example 4.4. El argumento usado en el ejemplo anterior prueba que, para toda métrica de $\mathbb{R}^n$, el complemento de cada punto es abierto.

Theorem 4.5. *Vale lo siguiente:*

(1) *$\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos.*
(2) *Si $(U_j)_{j\in J}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcup_{j\in J} U_j$ es abierto.*
(3) *Si U y V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces $U\cap V$ es abierto.*

Proof. Es claro que $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos. Dado $x\in\bigcup_{j\in J} U_j$, existe $i\in J$ tal que $x\in U_i$. Entonces, como U_i es abierto,

$$\mathrm{B}_r(x)\subseteq U_i\subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$$

para algún $r>0$. Esto prueba que $\bigcup_{j\in J} U_j$ es abierto. Por último, dado $x\in U\cap V$, existen números reales positivos r y r', tales que $\mathrm{B}_r(x)\subseteq U$ y $\mathrm{B}_{r'}(x)\subseteq V$. Denotemos con r'' al mínimo de r y r'. Es claro que $\mathrm{B}_{r''}(x)\subseteq U\cap V$. □

Del Ejemplo 4.1 y el Teorema 4.5 se sigue inmediatamente que un conjunto $U\subseteq\mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas. Para los abiertos de la recta hay una descripción más precisa.

Lemma 4.6. *Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de intervalos abiertos $I_\lambda := (a_\lambda, b_\lambda)$, donde $a_\lambda < b_\lambda$ están en $\overline{\mathbb{R}}$, que tiene un punto en común, entonces $\bigcup I_\lambda = (a,b)$, donde $a := \inf\{a_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ y $b := \sup\{a_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$.*

Proof. Por definición $a\le a_\lambda$ y $b_\lambda\le b$ para todo $\lambda\in\Lambda$ y, en consecuencia, $\bigcup I_\lambda\subseteq (a,b)$. Veamos que vale la otra inclusión. Tomemos para ello $x\in(a,b)$ y veamos que $x\in\bigcup I_\lambda$. Nuevamente por definición existen λ y λ' en Λ tales que $a_\lambda < x < b_{\lambda'}$. Como $(a_\lambda,b_\lambda)\cap(a_{\lambda'},b_{\lambda'})\neq\emptyset$, es imposible que $b_\lambda\le x\le a_{\lambda'}$. Así, necesariamente $x<b_\lambda$ o $a_{\lambda'}<x$ y, por lo tanto, $x\in I_\lambda\cup I_{\lambda'}$. □

Lemma 4.7. *Si $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es una unión disjunta de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, entonces Λ es contable.*

Proof. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, para cada I_λ podemos tomar $x_\lambda\in I_\lambda\cap\mathbb{Q}$. Como $\lambda\mapsto x_\lambda$ es una aplicación inyectiva (pues los I_λ son disjuntos dos a dos) de Λ en $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q}$ es numerable, el conjunto Λ es contable. □

Theorem 4.8. *Todo abierto X de $\mathbb{R}$ se expresa de manera única como una unión contable de intervalos abiertos disjuntos.*

Proof. Para cada $x\in X$ denotemos con I_x al máximo intervalo abierto que contiene a x y está contenido en X (este I_x es la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a x y están contenidos en X, y existe por el Lema 4.6). Para cada par x e y de elementos de X tales que $I_x\cap I_y\neq\emptyset$ sabemos que $I_x = I_y$. En efecto, por el Lema 4.6, la unión $I_x\cup I_y$ es un intervalo que contiene a I_x y a I_y y que está contenido en X. Por lo tanto $I_x = I_x\cup I_y$ e $I_y = I_x\cup I_y$, de lo cual se sigue que $I_x = I_Y$. En consecuencia $X=\bigcup_{x\in X} I_x$ es una unión disjunta de intervalos abiertos. Probemos la unicidad de esta descomposición. Supongamos que X se expresa como una unión disjunta $X=\bigcup_{\mu\in\Sigma}(a_\mu,b_\mu)$ de intervalos abiertos. Entonces, debido a la definición de los I_x, para cada $\mu\in\Sigma$ y cada $x\in(a_\mu,b_\mu)$, vale que $(a_\mu,b_\mu)\subseteq I_x$. Para terminar con la prueba de la unicidad, debemos ver que, necesariamente, $(a_\mu,b_\mu)=I_x$. Supongamos que esto no es así. Entonces $a_\mu\in X$ o $b_\mu\in X$. Digamos que $a_\mu\in X$ y tomemos μ' tal que $a_\mu\in(a_{\mu'},b_{\mu'})$. Pero entonces $(a_{\mu'},b_{\mu'})\cap(a_\mu,b_\mu)\supsetneq(a_\mu,b)$, donde $b=\min\{b_\mu,b_{\mu'}\}$ y, por lo tanto, $(a_{\mu'},b_{\mu'})\cap(a_\mu,b_\mu)\neq\emptyset$, lo que es imposible porque $(a_{\mu'},b_{\mu'})\neq(a_\mu,b_\mu)$, ya que a_μ está en el primero, pero no en el segundo. Finalmente, por el lema anterior, el conjunto $\{I_x : x \in X\}$ es contable. $\square$

Corollary 4.9. *Si un intervalo abierto (a,b) de $\mathbb{R}$ se expresa como una unión $(a,b) = X \cup Y$, de dos conjuntos abiertos disjuntos X e Y, entonces $X = \emptyset$ e $Y = (a,b)$ o $X = (a,b)$ e $Y = \emptyset$.*

Por el Teorema 4.5, para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hay un máximo subconjunto abierto A° de A, llamado el *interior* de A. En efecto, A° es la unión de todos los subconjuntos abiertos de A. Un punto x de $\mathbb{R}^n$ es un *punto interior* de A si pertenece a A°. En otras palabras, si $\mathrm{B}_r(x) \subseteq A$ para algún $r > 0$.

Theorem 4.10. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(1) *$A^\circ \subseteq A$ y $A^\circ = A$ si y sólo si A es abierto.*
(2) *Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.*
(3) *$A^{\circ\circ} = A^\circ$.*
(4) *$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.*
(5) *$\bigcup_{j\in J} A_j^\circ \subseteq (\bigcup_{j\in J} A_j)^\circ$.*

Proof. Los tres primeros items son evidentes. Por el item (2) sabemos que $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$, y la inclusión recíproca vale porque $A^\circ \cap B^\circ$ es un subconjunto abierto de $A \cap B$. La última afirmación se sigue facilmente del item (2). $\square$

Remark 4.11. En general la inclusión que aparece en el item (5) del teorema anterior, no puede ser reemplazada por una igualdad. Por ejemplo en la recta, $(0,1]^\circ \cup (1,2)^\circ = (0,1) \cup (1,2)$, mientras que $\big((0,1] \cup (1,2)\big)^\circ = (0,2)$.

El *exterior* de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\mathrm{Ext}(A) := (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$.

Remark 4.12. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece al exterior de A si y sólo si $d(x,A) > 0$. En efecto, es claro que $\mathrm{B}_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ si y sólo si $d(x,A) \geq r$.

5 Conjuntos cerrados y clausura

Fijemos una métrica d en $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es *cerrado* si $\mathbb{R}^n \setminus C$ es abierto. Por los Ejemplos 4.1, 4.2 y 4.4, los puntos, las bolas cerradas y los complementos de las bolas abiertas son cerrados.

Theorem 5.1. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(1) *$\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son cerrados.*
(2) *Si $(C_j)_{j\in J}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{j\in J} C_j$ es cerrado.*
(3) *Si C y D son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, entonces $C \cup D$ es cerrado.*

Proof. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 4.5 y de las leyes de de'Morgan. $\square$

Remark 5.2. Como todo punto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado, todo subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ también lo es.

La *clausura* o *adherencia* $\overline{A}$, de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ que incluyen a A. Por su misma definición y el Teorema 5.1, la clausura de A es el mínimo cerrado que inluye a A. Un punto x de $\mathbb{R}^n$ es un *punto de adherencia* de A si pertenece a $\overline{A}$.

Proposition 5.3. $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$ *y* $\mathbb{R}^n \setminus A^\circ = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$.

Proof. La primera igualdad vale porque $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$ es el máximo subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \setminus A$ y, por lo tanto, es el complemento del mínimo cerrado que incluye a A. La otra igualdad se puede probar de la misma manera. □

Proposition 5.4. *Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$ son equivalentes:*

(1) *x es un punto de adherencia de A.*
(2) $\mathrm{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$ *para todo $r > 0$.*
(3) *Cada entorno de x contiene puntos de A.*
(4) *Hay una sucesión de puntos de A que tiende a x.*
(5) $d(x, A) = 0$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Si existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_r(x) \cap A = \emptyset$, entonces $\mathrm{B}_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ y, por lo tanto, $x \in (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$, lo que es absurdo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Porque cada entorno de x contiene una bola abierta centrada en x.

(3) $\Rightarrow$ (2) Porque $\mathrm{B}_r(x)$ es un entorno de x.

(2) $\Rightarrow$ (4) Tomemos $x_n \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Es evidente que la sucesión $x_1, \dots, x_n, \dots$ tiende a x.

(4) $\Rightarrow$ (1) Como x es el límite de una sucesión de puntos de A, sabemos que $x \notin (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ y, en consecuencia, $x \in \overline{A}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (5) Esto es evidente. □

Theorem 5.5. *Para cada subconjunto A de X valen los siguentes hechos:*

(1) $A \subseteq \overline{A}$ *y* $A = \overline{A}$ *si y sólo si A es cerrado.*
(2) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(5) $\overline{\bigcap_{j\in J} A_j} \subseteq \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}$.

Proof. Los tres primeros items son evidentes. Por el item (2) sabemos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, y la inclusión recíproca vale porque $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un subconjunto cerrado de X que incluye a $A \cup B$. La última afirmación se sigue facilmente del item (2). □

Remark 5.6. En general la inclusión que aparece en el item (5) del teorema anterior, no puede ser reemplazada por una igualdad. Por ejemplo $\overline{(0,1)} \cap \overline{(1,2)} = [1,1] \cap [1,2] = \{1\}$, mientras que $\overline{(0,1) \cap (1,2)} = \emptyset$.

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto* de *acumulación* de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, si toda bola abierta de centro x contiene puntos de A distintos de x, es decir si $\mathrm{B}_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Remark 5.7. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, entonces x es un punto de acumulación de A si y sólo si es un punto de adherencia de A.

Proposition 5.8. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $A \subseteq \mathbb{R}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *x es un punto de acumulación de A.*
(2) *x es un punto de adherencia de $A \setminus \{x\}$.*
(3) *Cada entorno de x contiene puntos de $A \setminus \{x\}$.*
(4) *Cada entorno de x contiene puntos infinitos de $A \setminus \{x\}$*
(5) *Existe una sucesión de puntos de $A \setminus \{x\}$ que tiende a x.*
(6) *Existe una sucesión de puntos distintos de $A \setminus \{x\}$ que tiende a x.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Esto es inmediato por las definiciones de punto de acumulación y de punto de adherencia.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Por la equivalencia entre los items (2) y (3) de la Proposition 5.4.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) Por la equivalencia entre los items (3) y (4) de la Proposition 5.4.

(3) $\Rightarrow$ (6) Supongamos que hemos elejido puntos $x_1,\dots,x_n$ en $A\setminus\{x\}$, distintos dos a dos, tales que $d(x,x_i) < 1/i$ para $i = 1,\dots,n$. Escribamos $\epsilon := \min\{d(x,x_i) : i = 1,\dots,n\}$ y tomemos $x_{i+1} \in X\setminus\{x\}$ tal que $d(x,x_{n+1}) < \min\{\epsilon, 1/(n+1)\}$. Prosiguiendo de esta menera obtenemos una sucesión de puntos distintos dos a dos en $X\setminus\{x\}$, que converge a x.

(6) $\Rightarrow$ (4) Esto es trivial.

(4) $\Rightarrow$ (3) Esto es trivial. $\square$

Definition 5.9. El *conjunto derivado* A', de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, es el conjunto de los puntos de acumulación de A.

Remark 5.10. Se sigue de la proposición anterior que si $A' \neq \emptyset$, entonces A es infinito.

Example 5.11. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ que converge a un punto x de $\mathbb{R}^n$ y escribamos $A = \{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Si A es infinito, entonces $A' = \{x\}$, mientras que si A es finito, entonces $A' = \emptyset$.

Example 5.12. Para todo $a < b$ vale que $\big((a,b)\cap\mathbb{Q}\big)' = [a,b]$.

Remark 5.13. Consideremos un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, Es claro que $A' \subseteq \overline{A}$ y que si $x \in \overline{A}\setminus A$, entonces $x \in A'$. En consecuencia $\overline{A} = A \cup A'$ y, por lo tanto, A es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$.

Proposition 5.14. *Para cada par X e Y de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ vale lo siguiente:*

1. *Si $X \subseteq Y$, entonces $X' \subseteq Y'$.*
2. *$(X\cap Y)' \subseteq X'\cap Y'$ y $X'\cup Y' = (X\cup Y)'$.*
3. *$X' = \overline{X}'$.*
4. *$X'' \subseteq X'$.*

Proof. (1) Supongamos que $x \in X'$. Por la equivalencia entre los items (1) y (2) de la Proposition 5.8, sabemos que $x \in \overline{X\setminus\{x\}}$. Por lo tanto, del item (2) del Teorema 5.5, se sigue que $x \in \overline{Y\setminus\{x\}}$ y, en consecuencia, $x \in Y'$, nuevamente por la equivalencia entre los items (1) y (2) de la Proposition 5.8.

(2) Del item (1) se sigue inmediatamente que $(X\cap Y)' \subseteq X'\cap Y'$ y $X'\cup Y' \subseteq (X\cup Y)'$. Para terminar la demostración debemos ver que si $x \in (X\cup Y)'$, entonces necesariamente $x \in X'\cup Y'$. Pero esto es claro, pues si $x \notin X'$ y $x \notin Y'$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\mathrm{B}_\epsilon(x)\cap(X\setminus\{x\}) = \mathrm{B}_\epsilon(x)\cap(Y\setminus\{x\}) = \emptyset$$

y, por lo tanto, $\mathrm{B}_\epsilon(x)\cap((X\cup Y)\setminus\{x\}) = \emptyset$, lo que se contradice con que $x \in (X\cup Y)'$.

(3) Del item (1) se sigue inmediatamente que $X' \subseteq \overline{X}'$. Tomemos $x \in \overline{X}'$ y veamos que $x \in X'$. Por definición, para cada $\epsilon > 0$ existe $y \in \mathrm{B}_\epsilon(x)\cap(\overline{X}\setminus\{x\})$. Tomemos

$$\epsilon' < \min\{d(x,y), \epsilon - d(x,y)\},$$

de modo que $x \notin \mathrm{B}_{\epsilon'}(y)$ y $\mathrm{B}_{\epsilon'}(y) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(x)$. Dado que $y \in \overline{X}$, existe $z \in \mathrm{B}_{\epsilon'}(y)\cap X$. Es claro que

$$z \in (\mathrm{B}_\epsilon(x)\setminus\{x\})\cap X = \mathrm{B}_\epsilon(x)\cap(X\setminus\{x\})$$

y, por lo tanto, $x \in X'$.

(4) Como $X' \subseteq \overline{X}$ se sigue de los items (1) y (3), que $X'' \subseteq \overline{X}' = X'$. $\square$

Remark 5.15. En general la inclusión que aparece en el item (4) de la proposición anterior, no puede ser reemplazada por una igualdad. Por ejemplo si $X \coloneqq \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $X' = \{0\}$ y, por lo tanto, $X'' = \emptyset$.

Un punto $x \in A$ es un *punto aislado* de A si existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_r(x) \cap A = \{x\}$, es decir si no es un punto de acumulación de A. Así $\overline{A} = A' \cup (A \setminus A')$ es la unión disjunta de A' y del conjunto de puntos aislados de A. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es un *subconjunto aislado* de $\mathbb{R}^n$ si $A' = \emptyset$.

Proposition 5.16. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es aislado si y sólo si es cerrado y todos sus puntos son puntos aislados de A.*

Proof. Supongamos que A es aislado. Así $A' = \emptyset$ y, en consecuencia, todos los puntos de A son aislados. Además trivialmente $A' \subseteq A$ y, por lo tanto, debido al Remark 5.13, el conjunto A es cerrado. Supongamos ahora que A es cerrado y que todos sus puntos son puntos aislados de A. Por lo primero $A' \subseteq A$, mientras que, por lo segundo, $A' \cap A = \emptyset$. En consecuencia $A' = \emptyset$, por lo que A es aislado. $\square$

Remark 5.17. En la proposición anterior la condición de que A sea cerrado es escencial. Por ejemplo, todos los puntos del conjunto $A \coloneqq \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ son puntos aislados de A, pero A no es un subconjunto aislado de $\mathbb{R}$.

Remark 5.18. Debido a las Notas 5.2 y 5.10 si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es finito, entonces A es cerrado y todos sus puntos son aislados (es decir que A es aislado).

Definition 5.19. Consideremos subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^n$ tales que $X \subseteq Y$. Decimos que X es *denso en* Y si $Y \subseteq \overline{X}$.

Proposition 5.20. *Para cada par de subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^n$ con $X \subseteq Y$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es denso en Y.*
2. *Para cada $x \in Y$ y todo $r > 0$, la intersección $\mathrm{B}_r(x) \cap X$ no es vacía.*
3. *Para cada $x \in Y$, todo entorno de x contiene puntos de X.*
4. *Para cada $x \in Y$, existe una sucesión de puntos de X que tiende a x.*

Proof. Por la Proposición 5.4. $\square$

Proposition 5.21. *Consideremos dos subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^n$ con $X \subseteq Y$. Si X es denso en Y, entonces todo punto aislado de Y pertenece a X.*

Proof. Tomemos un punto aislado $x \in Y$. Así existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}_\epsilon(x) \cap Y = \{x\}$. Por otro lado, dado que X es denso en Y, sabemos que $\mathrm{B}_\epsilon(x) \cap X \neq \emptyset$. Así

$$\emptyset \neq \mathrm{B}_\epsilon(x) \cap X \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(x) \cap Y = \{x\},$$

por lo que $x \in X$. $\square$

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *perfecto* si $A' = A$. En otras palabras, si es cerrado y no tiene puntos aislados. Notemos que si $B \subseteq \mathbb{R}^n$ no tiene puntos aislados (es decir si $B \subseteq B'$), entonces $\overline{B} = B'$ es perfecto. Probaremos a continuación que si estamoa usando la métrica d_∞ (o cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \|_\infty$), entonces ningún subconjunto perfecto y no vacío de $\mathbb{R}^r$ es numerable.

Lemma 5.22. *Consideremos un conjunto cerrado X de $\mathbb{R}^n$ sin puntos aislados y un punto $x \in X$. Existe un subconjunto no vacío X_x de $X \setminus \{x\}$, que es cerrado, acotado y no contiene puntos aislados.*

Proof. Debido a la Nota 5.18 el conjunto X es infinito. Así existe $y \in X \setminus \{x\}$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $x \notin \mathrm{B}_\epsilon[y]$. Entonces $\mathrm{B}_\epsilon(y) \cap X$ es acotado, no vacío y no contiene puntos aislados. Por lo tanto $X_x := \mathrm{B}_\epsilon(y) \cap X$ es perfecto, no vacío y acotado. Finalmente $x \notin X_x$ pues $X_x \subseteq \mathrm{B}_\epsilon[y]$. □

Theorem 5.23. *Consideremos la métrica d_∞ (o cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \|_\infty$). Si X es un subconjunto perfecto y no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces X no es contable.*

Proof. Supongamos que $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\} \subseteq X$. Vamos a ver que esta inclusión es propia. Aplicando el lema anterior sucesivamente obtenemos una cadena decreciente de subconjuntos perfectos y no vacíos $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq X_4 \supseteq \dots$, de X, tales que $x_r \notin X_r$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cap \bigcap_{r\in\mathbb{N}} X_r = \emptyset$. En consecuencia para terminar la demostración será suficiente ver que $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} X_r \neq \emptyset$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ tomemos $y_r \in X_r$. Como $\{y_r : r \in \mathbb{N}\} \subseteq X_1$ la sucesión $(y_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es acotada y, por lo tanto, debido a la Proposición 3.6, tiene una subsucesión convergente $(y_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Denotemos con y a su límite y tomemos $r \in \mathbb{N}$ arbitrario. Dado que, para todo i suficientemente grande $y_{r_i} \in X_r$, resulta que $y \in \overline{X_r}$. Como $r \in \mathbb{N}$ es arbitrario y los X_r son cerrados, se sigue de esto que $y \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}} X_r$. Por lo tanto $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} X_r \neq \emptyset$. □

La *frontera* de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\partial(A) := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)} = \overline{A} \setminus A^\circ$. Por lo tanto $\overline{A} = A^\circ \cup \partial(A)$ y esta unión es disjunta, de lo cual se sigue que A es la unión disjunta de A° y de $A \cap \partial(A)$. Notemos por último que $\partial(A)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Remark 5.24. Consideremos un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$. De la igualdad $\overline{A} = A \cup \partial(A)$ se sigue que A es cerrado si y sólo si $\partial(A) \subseteq A$. Por otro lado, del hecho de que A es la unión disjunta de A° y de $A \cap \partial(A)$, se sigue que A es abierto si y sólo si $A \cap \partial(A) = \emptyset$.

5.1 Puntos de acumulación en $\mathbb{R}$

Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de *acumulación a derecha* de un conjunto X si es un punto de acumulación de $X \cap [x, +\infty)$. Esto equivale a decir que en cada intervalo de la forma $[x, \epsilon)$ hay un punto de X distinto de x (o una cantidad infinita de puntos de X distintos de x). También equivale a decir que hay una sucesión estrictamente decreciente de puntos de X que tiende a x. Analogamente $x \in \mathbb{R}$ es un punto de *acumulación a izquierda* de un conjunto X si es un punto de acumulación de $X \cap (-\infty, x]$, lo que equivale a decir que en cada intervalo de la forma $(-\epsilon, x]$ hay un punto de X distinto de x (o una cantidad infinita de puntos de X distintos de x), y también a que hay una sucesión estrictamente creciente de puntos de X que tiende a x. Es claro que cada punto de acumulación a izquierda o a derecha de X es un punto de acumulación de X y que cada punto de acumulación de X, es un punto de acumulación a izquierda o a derecha de X. Los conjuntos de los puntos de acumulación a derecha de X y de los puntos de acumulación a izquierda de X serán denotados con X'_+ y X'_-, respectivamente. A los puntos de $X_+ \cap X'_-$ los llamaremos *puntos de acumulación bilaterales de X*.

6 Separabilidad

Fijemos una métrica d en $\mathbb{R}^n$. Decimos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es denso si es denso en $\mathbb{R}^n$, es decir si $\overline{A} = \mathbb{R}^n$. Así A es denso si su complemento tiene interior vacío. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Recordemos que un conjunto A es contable si es finito o numerable. Decimos que $\mathbb{R}^n$ con la métrica definida por d es *separable* si tiene un subconjunto contable y denso. Una *base* de $\mathbb{R}^n$ (para la topología definida por d) es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, formado por subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, tal que

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subseteq U}} V \qquad \text{para todo abierto } U \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Por ejemplo los conjuntos

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{B}_r(x) : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } r > 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{\mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

son bases de $\mathbb{R}^n$ (para cualquier métrica d).

Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$. Un *cubrimiento* de X es cualquier familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $X \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{D}} A$. Un subconjunto $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es un *subcubrimiento* de $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}'$ también cubre X. Un cubrimiento de X es *abierto* si todos sus miembros lo son.

Remark 6.1. Si dos métricas de R^n provienen de normas equivalentes, entonces sus topologías coinciden y por tanto, tiene los mismos subconjuntos densos y las mismas bases.

Proposition 6.2. *Con respecto a la métrica d_∞ (o a cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \|_\infty$), $\mathbb{R}^n$ es separable.*

Proof. Se comprueba facilmente que $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Q} \text{ para todo } i\}$, es un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R}^n$. □

Theorem 6.3. *Para cada métrica d las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathbb{R}^n$ es separable.*
2. *$\mathbb{R}^n$ tiene una base contable.*
3. *Para cada subconjunto X de $\mathbb{R}^n$, cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento contable (propiedad de Lindeloff).*
4. *Cada cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene un subcubrimiento contable.*

Proof. (1) ⇒ (2) Para cada subconjunto contable denso $\{x_r \in \mathbb{R}^n : r \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$, el conjunto

$$\mathcal{B} := \{\mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x_r) : r, m \in \mathbb{N}\}$$

es una base contable de $\mathbb{R}^n$. En efecto, dados un abierto U y un punto $y \in U$, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{B}_{\frac{2}{m}}(y) \subseteq U$ y elijamos $x_r \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(y)$. Entonces $y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x_r) \subseteq \mathrm{B}_{\frac{2}{m}}(y) \subseteq U$.

(2) ⇒ (3) Fijemos un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y una base contable $\mathcal{B} = \{U_r : r \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Dado un cubrimiento abierto $\{V_j : j \in J\}$ de X, consideremos el subconjunto $\{U_{r_1}, U_{r_2}, U_{r_3}, U_{r_4}, \dots\}$ de $\mathcal{B}$ formado por los U_i's tales que $U_i \subseteq V_j$ para algún j. Ahora para cada r_i, tomemos un V_j tal que $U_{r_i} \subseteq V_j$ y llamemoslo V_{r_i}. Entonces

$$X \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_{r_i} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{r_i},$$

donde la primera igualdad se sigue de que $V_j = \bigcup\{U_r : U_r \subseteq V_j\}$, para cada $j \in J$.

(3) ⇒ (4) Esto es trivial.

(4) ⇒ (1) Por hipótesis, para cada $r \in \mathbb{N}$, el cubrimiento abierto $\mathcal{V}_m := \{\mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x) : x \in X\}$ tiene un subcubrimiento contable $\widetilde{\mathcal{V}}_m = \{\mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x_{r,m}) : r \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que el subconjunto contable $A := \{x_{r,m} : r, m \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$. En efecto, dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, podemos tomar $m \geq 1/\epsilon$ y elegir $x_{r,m}$ tal que $x \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x_{r,m})$, lo que implica que $x_{r,m} \in B_\epsilon(x)$. □

Theorem 6.4. *Si $\mathbb{R}^n$ con la métrica definida por d es separable, entonces todo subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ tiene un subconjunto denso y contable.*

Proof. Tomemos una base contable $\mathcal{B} = \{U_r : r \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Para cada U_r tal que $X \cap U_r \neq \emptyset$ elijamos $x_r \in X \cap U_r$. Evidentemente $D := \{x_r : r \text{ tales que } X \cap U_r \neq \emptyset\}$ es un subconjunto contable de X. Afirmamos que es denso en X. Supongamos que $x \in X$ y tomemos un abierto V de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in V$. Por hipótesis $x \in U_r \subseteq V$ para algún $r \in \mathbb{N}$ y, así, $x_r \in V$. Por lo tanto D es denso en X, como afirmamos. □

Proposition 6.5. *Si $\mathbb{R}^n$ con la métrica definida por d es separable, entonces la cantidad de puntos aislados de un subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$ es contable.*

Proof. Por el Teorema 6.4, existe un subconjunto denso y contable X de Y. Dado que, por la Proposición 5.21, todo punto aislado de Y está en X, esto termina la demostración. □

7 Compacidad

Fijemos una métrica d en $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ *compacto* si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Proposition 7.1. *Para cada subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es compacto.*
(2) *Toda familia de cerrados de $\mathbb{R}^n$ cuya intersección no corta a X tiene una subfamilia finita cuya intersección tampoco corta a X.*

Proof. (1) ⇒ (2) Consideremos una familia $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de cerrados de $\mathbb{R}^n$ tal que $\bigcap C_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$. Como

$$X = \big(\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus X)\big) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bigcap C_\lambda = \bigcup (\mathbb{R}^n \setminus C_\lambda),$$

existen $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ en Λ, tales que $X \subseteq \bigcup_{j=1}^r (\mathbb{R}^n \setminus C_{\lambda_{i_j}})$. Así,

$$\bigcap_{j=1}^r C_{\lambda_{i_j}} = \bigcap_{j=1}^r \big(\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus C_{\lambda_{i_j}})\big) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r (\mathbb{R}^n \setminus C_{\lambda_{i_j}}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X,$$

como queremos.

(2) ⇒ (1) Consideremos una familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $X \subseteq \bigcup U_\lambda$. Como

$$\bigcap (\mathbb{R}^n \setminus U_\lambda) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup U_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X,$$

existen $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ en Λ, tales que $\bigcap_{j=1}^r (\mathbb{R}^n \setminus U_{\lambda_{i_j}}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$. Así,

$$X = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus X) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{j=1}^r (\mathbb{R}^n \setminus U_{\lambda_{i_j}}) = \bigcup_{j=1}^r \big(\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus U_{\lambda_{i_j}})\big) = \bigcup_{j=1}^r U_{\lambda_{i_j}},$$

como queremos. □

Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ *numerablemente compacto* si todo cubrimiento abierto numerable de X tiene un subcubrimiento finito. Es obvio que todo subconjunto compacto es numerablemente compacto.

Proposition 7.2. *Para cada subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es numerablemente compacto.*
(2) *Toda familia numerable de cerrados de $\mathbb{R}^n$ cuya intersección no corta a X tiene una subfamilia finita cuya intersección tampoco corta a X.*
(3) *Para toda cadena decreciente $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$, de cerrados de $\mathbb{R}^n$, cuya intersección no corta a X existe algún $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X \cap C_{r_0} = \emptyset$.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Copie la prueba de la Proposición anterior

(2) $\Rightarrow$ (3) Esto es trivial

(3) $\Rightarrow$ (2) Esto es trivial Consideremos una familia $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, numerable de cerrados de $\mathbb{R}^n$ cuya intersección no corta a X. Para cada $i \in \mathbb{N}$ denotemos con D_i a $D_i := C_1 \cap \cdots \cap C_i$. Es evidente que $D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \dots$ y que $\bigcap D_i = \bigcap C_i$. Así, por hipótesis, existe $r_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$X \cap C_1 \cap \cdots \cap C_{r_0} = X \cap D_{r_0} = \emptyset,$$

como queremos. □

Proposition 7.3. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Todo subconjunto numerablemente compacto X de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado.*
2. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y $C \subseteq X$ es cerrado, entonces C es compacto.*
3. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es numerablemente compacto y $C \subseteq X$ es cerrado, entonces C es numerablemente compacto.*

Proof. (1) Como $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n(0)$ es un cubrimiento numerable por abiertos de X existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X \subseteq \mathrm{B}_{r_0}(0)$. Por lo tanto X es acotado. Veamos ahora que es cerrado. Supongamos existiera $x \in \overline{X} \setminus X$. Es evidente que entonces $X \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}_{1/r}[x]$ sería un cubrimiento por abiertos de X que no tendría ningún subcubrimiento finito.

(2) Tomemos un cubrimiento $(U_i)_{i\in I}$ de C por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Dado que X es compacto y C es cerrado, existen $i_1, \dots, i_r \in I$ tales que

$$X \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{r} U_{i_j}\right) \cup (\mathbb{R}^n \setminus C),$$

por lo que, necesariamente, $C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} U_{i_j}$.

(3) Copie la prueba del item (2). □

Theorem 7.4. *Para cada subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es numerablemente compacto.*
2. *Todo subconjunto infinito A de X tiene un punto de acumulación en X.*
3. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X tiene una subsucesión que converge a un punto x de X.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $A' \cap X = \emptyset$ para algún subconjunto infinito A de X. Por el item (1) de la Proposición 7.3 sabemos que $A' \subseteq X$ y, por lo tanto, $A' = \emptyset$. Tomemos un subconjunto numerable $B \subseteq A$. Del item (1) de la Proposición 5.14 se sigue que $B' = \emptyset$. En consecuencia, por la Proposición 5.16, el conjunto B es cerrado y todos sus puntos son aislados. Debido a esto último cada $x \in B$ es el centro de una bola abierta $\mathrm{B}_{\epsilon_x}(x)$ tal que $\mathrm{B}_{\epsilon_x}(x) \cap B = \{x\}$. Así, $(\mathbb{R}^n \setminus B) \cup \big(\bigcup_{x\in B} \mathrm{B}_{\epsilon_x}(x)\big)$ es un cubrimiento abierto de X que no tiene ningún subcubrimiento finito.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es claro que si $\{x_r : r \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito, entonces $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ tiene una subsucesión constantemente igual a uno de sus puntos (y que por lo tanto converge trivialmente a él). Supongamos ahora que $\{x_r : r \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Entonces por hipótesis tiene un punto de acumulación $x \in X$, lo cual nos permite construír recursivamente una subsucesión $(x_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que tiende a x, simplemente tomando $x_{r_{i+1}} \in \mathrm{B}_{\frac{1}{i+1}}(x) \cap \{x_{r_i+1}, x_{r_i+2}, \dots\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Por la Proposición 7.2 es suficiente probar que si $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$ es una cadena decreciente de cerrados de $\mathbb{R}^n$ tal que $C_r \cap X \neq \emptyset$ para todo $r \in \mathbb{N}$, entonces $X \cap \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_r \neq \emptyset$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ elijamos $x_r \in X \cap C_r$. Por hipótesis $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$. Tomemos $r \in \mathbb{N}$ arbitrario. Dado que para todo i suficientemente

grande $x_{r_i} \in C_r$, resulta que $x \in \overline{C_r}$. Como $r \in \mathbb{N}$ es arbitrario y los C_r son cerrados, se sigue de esto que $x \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_r$. Por lo tanto $x \in X \cap \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_r$. □

Proposition 7.5. *Si $\mathbb{R}^n$ es separable, entonces todo subconjunto numerablemente compacto de $\mathbb{R}^n$ es compacto.*

Proof. Consideremos un subconjunto numerablemente compacto X de $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema 6.3 cada cubrimiento por abiertos de X tiene un subcubrimiento numerable. Ahora, dado que X es numerablemete compacto, de este subcubrimiento se puede extraer un subcubrimiento finito. □

Theorem 7.6. *Consideremos la métrica d_∞ (o cualquier métrica que provenga de una norma equivalente a $\| \ \|_\infty$). Si X es cerrado y acotado, entonces X es compacto.*

Proof. Por las Proposiciones 6.2 y 7.5 será suficiente ver que X es numerablemente compacto. Consideremos una cadena decreciente $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$, de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, tal que $C_r \cap X \neq \emptyset$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ elijamos $x_r \in X \cap C_r$. Como X es acotado se sigue de la Proposición 3.6 que $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto x. Tomemos $r \in \mathbb{N}$ arbitrario. Dado que para todo i suficientemente grande $x_{r_i} \in C_r$, resulta que $x \in \overline{X \cap C_r}$. Como $r \in \mathbb{N}$ es arbitrario y los conjuntos $X \cap C_r$ son cerrados, se sigue de esto que $x \in X \cap \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_r$. En consecuencia $X \cap \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_r \neq \emptyset$ y, por lo tanto, X es numerablemente compacto. □

8 Abiertos y cerrados relativos

Fijemos un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto U de X es *abierto relativo a* X si $U = X \cap V$, donde V es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y es *cerrado relativo a* X si $U = X \cap V$, donde V es un cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Notemos que si X es abierto, entonces un subconjunto U de X es abierto relativo a X si y sólo si es abierto en $\mathbb{R}^n$. Similarmente si X es cerrado, entonces un subconjunto U de X es cerrado relativo a X si y sólo si es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Theorem 8.1. *Vale lo siguiente:*

(1) *X y $\emptyset$ son abiertos relativos a X.*
(2) *Si $(U_j)_{j\in J}$ es una familia de abiertos relativos a X, entonces $\bigcup_{j\in J} U_j$ es un abierto relativo a X.*
(3) *Si U y U' son abiertos relativos a X, entonces $U \cap V$ es un abierto relativo a X.*

Proof. Es claro que X y $\emptyset$ son abiertos relativos a X. Supongamos que $(U_j)_{j\in J}$ es una familia de abiertos relativos a X. Para cada $j \in J$ tomemos un abierto V_j de $\mathbb{R}^n$ tal que $U_j = X \cap V_j$. Entonces

$$\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{j\in J} V_j \cap X = \left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) \cap X,$$

es abierto relativo a X pues $\bigcup_{j\in J} V_j$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Supongamos finalmente que U y U' son abiertos relativos a X y tomemos abiertos V y V' de $\mathbb{R}^n$ tales que $U = V \cap X$ y $U' = V' \cap X$. Entonces

$$U \cap U' = (V \cap X) \cap (V' \cap X) = (V \cap V') \cap X,$$

es abierto relativo a X pues $V \cap V'$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. □

Theorem 8.2. *Un subconjunto Y de X es cerrado relativo a X si y sólo si $X \setminus Y$ es abierto relativo a X.*

Proof. Supongamos primero que Y es cerrado relativo a X y tomemos un cerrado Z de $\mathbb{R}^n$ tal que $Y = Z \cap X$. Entonces

$$X \setminus Y = X \setminus Z \cap X = (\mathbb{R}^n \setminus Z) \cap X$$

es abierto relativo a X, pues $\mathbb{R}^n \setminus Z$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. La prueba de la inversa es similar. □

Theorem 8.3. *Vale lo siguiente:*

(1) *X y $\emptyset$ son cerrados relativos a X.*
(2) *Si $(Y_j)_{j\in J}$ es una familia de cerrados relativos a X, entonces $\bigcap_{j\in J} Y_j$ es un cerrado relativo a X.*
(3) *Si Y y Y' son cerrados relativos a X, entonces $Y \cup Y'$ es un cerrado relativo a X.*

Proof. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 8.1 y de las leyes de de'Morgan. □

Consideremos un punto a de X. Un subconjunto U de X es un entorno de a relativo a X si existe un abierto relativo U' de X tal que $a \in U' \subseteq U$. Es facil ver que U es un entorno de a relativo a X si y sólo si existe un entorno V de a en $\mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap X$.

Remark 8.4. Es obvio que si $U \subseteq X$ es un abierto relativo a X, entonces U es un entorno de a relativo a X para cada $a \in U$. Recíprocamente si $U \subseteq X$ es un entorno relativo a X de cada uno de sus puntos, entonces U es un abierto relativo a X. En efecto, por definición, para cada $a \in U$ hay un abierto $U_a \subseteq U$, de a relativo a X. Dado que $U = \bigcup_{a\in a} U_a$, se sigue del item (2) del Teorema 8.1, que U es abierto relativo a X.